Concurso de Cargos Interinos

Noviembre de 2017

CALCULO NUMERICO

Tema: **Ceros de funciones no lineales**

Clase de Oposición.

(1) Resolver y presentar el siguiente problema de la Guía de Trabajos Prácticos No. 2, utilizando adecuadamente los conceptos clave:

La ecuación x^2 -10 cos x = 0 tiene dos soluciones, ± 1.3793646. Utilice el método de Newton-Raphson para encontrar una solución aproximada con un error menor a 10^{-5} considerando los siguientes valores iniciales: (a). x_0 = -100; (b). x_0 = -25; (c). x_0 = -1, (d). x_0 = 0.

(2) Las páginas adjuntas corresponden a la resolución por parte de un estudiante del siguiente problema que ha sido parte de un examen parcial de esta asignatura:

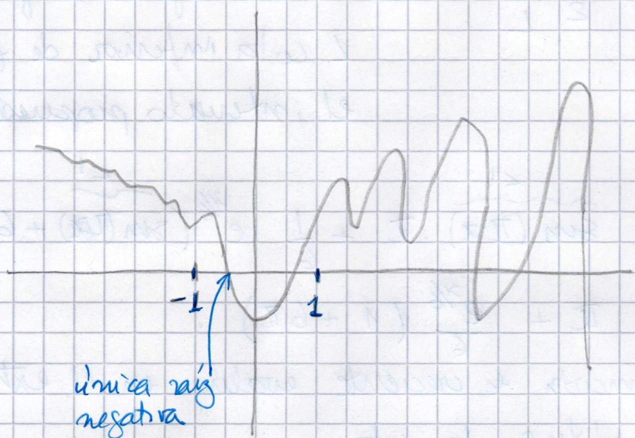
La función $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \exp\left(\frac{x}{6}\right)\cos(\pi x)$ tiene un número infinito de ceros.

(a) Verificar que la función tiene un único cero negativo.
(b) Encontrar un intervalo $[a, b]$ que asegure que el método de Newton-Raphson converja a la raíz negativa de $f(x)$ para cualquier punto inicial en él.
(c) Calcular el número de pasos necesarios para obtener una aproximación a dicha raíz con error menor que 10^{-6}.
(d) Calcular la raíz con calculadora. Verificar con SciLab.

Corregir la solución del problema en la hoja impresa y explicar verbalmente cómo le comunicaría al estudiante los errores cometidos y la forma correcta de resolverlo.

Para la presentación se puede utilizar una notebook y Scilab.

(a) $f(x) = \ln(x^2+1) - e^{\left(\frac{x}{6}\right)} . \cos(\pi x)$



(b) Teorema: si $f'(x) \neq 0$ y $f''(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$, $f(a).f(b) < 0$ $\Rightarrow \frac{f(a)}{f'(a)} < b-a$ y $\frac{f(b)}{f'(b)} < b-a$

N-R converge.

Calculo $f'(x)$ y $f''(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} . 2x - \left[e^{\frac{x}{6}} . \frac{1}{6} + \cos(\pi x) + e^{\frac{x}{6}} - \operatorname{sen}(\pi x) . \pi \right]$$

$$= \frac{2x}{x^2+1} - \frac{e^{x/6}}{6} - \cos(\pi x) + e^{x/6} . \operatorname{sen}(\pi x) . \pi$$

$$f''(x) = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2-1)^2} - \frac{e^{x/6}}{12} + \operatorname{sen}(\pi x) . \pi + \frac{e^{x/6}}{6} (\operatorname{sen}(\pi x) + 6\pi \cos(\pi x))$$

Propongo intervalo ~~[...]~~ $[-0.9 , 0.01]$

$$\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| = 0.058 < 0.91$$

$$\left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| = 0.8571 < 0.91$$

(c) Fórmula vista en clase:

$$\frac{1}{m}\left(\varepsilon_0 m\right)^{2^n} < 10^{-6}$$

siendo $m = \frac{1}{2}\frac{K}{L}$ con K cota superior de f'' y L cota inferior de f' en el intervalo propuesto en (b)

Busco cotas:

$$f''(x) < \underbrace{\sin(\pi x)}_{<1} \cdot \pi + \frac{1}{6} e^{x/6}\left(\overbrace{\sin(\pi x)}^{<1} + 6\pi \overbrace{\cos(\pi x)}^{<1}\right)$$

$$< \pi + \frac{e^{x/6}}{6}(1 + 6\pi)$$

Como la función es creciente evalúo en el extremo derecho y obtengo la cota

$$\boxed{< 6.96} = K$$

Cota inferior de $f'(x)$

$$f'(x) > -\frac{e^{x/6}}{6} - \cos(\pi x) > -\frac{e^{\frac{x}{6}}}{6} - 1$$

$$> -1.19$$

Como es decreciente, evalúo en el extremo derecho.

Hago $\frac{1}{2}\frac{K}{L} = \frac{1}{2}\frac{6.96}{-1.19} = -2.92 = m$

Tomo $\varepsilon_0 = x_0 - \alpha$, $\varepsilon_0 = 0.1$

$$|m \cdot \varepsilon_0| = |-2.92 \times 0.1| = 0.292 < 1$$

Reemplazando en la fórmula

$$\frac{1}{m}(m \cdot \varepsilon_0)^{2^n} < 10^{-6}$$

$$\frac{1}{2.92}(0.292)^{2^n} < 10^{-6}$$

$$\log_{10}(0.34) + 2^n \log_{10}(0.292) < -6$$

$$2^n > \frac{-6 + \log_{10}(0.34)}{\log_{10}(0.292)}$$

$$2^n > 5,25 \quad \Rightarrow \quad n \geq 3$$

(d) Puedo elegir $x_0 = -0.4$ en $[-0.9, 0.01]$

	x_n	f	f'	h
0	-0.4	-0.1406676	-3.4366118	0,0409320
1	-0.440932	0.006299	-3.57863333	-0.0017601
2	-0.43317183	-0,0219258	-3.5557523	0.00616629
3	-0.4392834	0.0002388	-3.5739316	-0.0000668
4	-0.43921658	-0.0000042	-3.573739	0.00000118
5	$\boxed{-0.4392177}$			

Con Scilab obtengo $\bar{\alpha} = -0.4392177$